> EL PASADOR >

La carta del CSEN

Monica Neagoy[1]

[1]Autora, consultora y formadora internacional en matemáticas por el Consejo Nacional de la EducaciónNacional de Francia (CSEN)

Enero 2025

ENSEÑAR LAS FRACCIONES CON SENTIDO... ¡Y PLACER!

El aprendizaje de las fracciones presenta un desafío considerable para los estudiantes. Por eso, al descubrirlas tempranamente, estarán más capacitados para apreciar «estos nuevos números» y abrirse al fascinante mundo de las matemáticas. ¿Cuáles son los obstáculos comunes en el aprendizaje de las fracciones y cuáles son las pistas para remediarlos?

¿QUÉ ES UNA FRACCIÓN Y POR QUÉ LAS FRACCIONES SON FUNDAMENTALES?

En la escuela primaria, los estudiantes abordan la fracción como un número que se escribe en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos $\{0, 1, 2, 3 \ldots\}$, como $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{5}$. El cero forma parte de ello, ya que $\frac{0}{b} = 0$ para cualquier valor de b, diferente de 0. En otras palabras, $\frac{a}{0}$ no tiene sentido. En el colegio, los estudiantes añaden a su repertorio de números los enteros negativos; entonces, la fracción formará parte de los números racionales, es decir, los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros relativos $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$. La condición $b \neq 0$ sigue vigente.

Estos números son importantes por al menos cuatro razones:

- El dominio de las fracciones es necesario en la vida cotidiana, por ejemplo, para seguir recetas, calcular descuentos, cambiar dinero, convertir unidades de medida, comparar tasas... y en el mundo del trabajo, como la medicina, el deporte, la construcción, la carpintería, la salud, y mucho más.

- Las fracciones son esenciales para el éxito en álgebra. En América, un informe de un panel nacional de consejo, compuesto de expertos en matemáticas, concluyó después de dos años de estudio, que el álgebra era la clave del éxito en matemáticas avanzadas, y que la principal razón del fracaso de los estudiantes en este campo era su débil dominio de las fracciones. Incluso en los países con mejor rendimiento, las fracciones resultan ser un tema difícil de aprender y enseñar.

- Los trabajos de Gérard Vergnaud muestran que forman parte integral de una serie de estructuras multiplicativas. A medida que los estudiantes estudian estas estructuras, pasan progresivamente de un pensamiento aditivo a un pensamiento multiplicativo, condición requerida para el razonamiento proporcional.

- Las fracciones juegan un papel clave en los sentimientos de los estudiantes hacia las matemáticas. Para muchos de ellos, las fracciones constituyen una primera dificultad en su aprendizaje. Cuando deben renunciar a su comprensión y conformarse con aprender de memoria reglas y procedimientos que parecen carecer de sentido, es el comienzo del fin de su amor por las matemáticas.

¿CUÁLES SON LOS OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES?

En muchos países, durante demasiado tiempo, las escuelas han producido generaciones de estudiantes para quienes el aprendizaje de las fracciones consistía en una breve introducción del sentido de «parte de un todo», seguida de años de práctica repetida de cálculo de fracciones. Sin embargo, comprender bien las fracciones es mucho más que conocer las reglas y los algoritmos de cálculo.

Algunas dificultades encontradas por los estudiantes:

1. **La naturaleza bipartita de una fracción**. Después de años de trabajo con los números naturales (es decir, $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$), los estudiantes no pueden comprender de inmediato una fracción como un solo número, ya que su escritura simbólica comprende dos.

2. **El sesgo de razonamiento sobre los números enteros**. Como consecuencia del punto anterior, uno de los obstáculos mayores que encuentran los estudiantes, subrayado en los trabajos de Van Hoof y otros, es que el razonamiento sobre los números enteros no siempre se aplica a las fracciones. Dos ejemplos típicos:

- $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ porque $4 > 3$; sin embargo, $\frac{1}{4}$ es inferior a $\frac{1}{3}$.
- «La multiplicación hace más grande y la división hace más pequeño» ; sin embargo, la multiplicación $10 \times \frac{1}{2}$ da 5 (un producto inferior a 10) y la división $3 \div \frac{1}{2}$ da 6 (un cociente superior a 3).

3. **Ideas limitadas sobre el significado de las fracciones**. Muchos estudiantes solo ven las fracciones desde un único ángulo: el sentido de «parte de un todo», como en $\frac{3}{4}$ de un pastel significa 3 partes tomadas entre 4 partes iguales del pastel. Esta concepción inicial - y a menudo única - limita su comprensión de las nociones futuras.

4. **Un repertorio limitado de representaciones de fracciones y una falta de conexiones establecidas entre ellas**. Las representaciones visuales, táctiles y otras, presentadas en un orden bien pensado, desde lo más concreto a lo más abstracto, ayudan a los estudiantes a construir sentido. Sin embargo, cuando las representaciones son deficientes o insuficientes y el paso a la abstracción es demasiado rápido, la fracción permanece como un símbolo carente de sentido que se manipula aplicando reglas que parecen tener aún menos sentido.

5. **Una incomprensión del concepto de unidad**. Una dificultad mayor encontrada por los estudiantes se relaciona con la concepción de la noción de unidad (primero llamada «el todo» en el ciclo 2[1]). En otras palabras, una fracción siempre se define en relación con un todo, explícito o implícito. Un cuarto de 12 estudiantes y un cuarto de 20 estudiantes no representan el mismo número de estudiantes.

6. **Una comprensión superficial de la magnitud de una fracción y, en consecuencia, una dificultad para comparar dos fracciones sin la ayuda de una regla para aplicar**. Esto se debe en parte a que la enseñanza no subraya suficientemente la representación espacial de los números: primero la representación de los números enteros en la banda numérica y luego la representación de las fracciones en la recta numérica. Un ejemplo de razonamiento deseable, pero raro: $\frac{7}{8}$ es superior a $\frac{5}{6}$ porque el primero está a $\frac{1}{8}$ de 1 (en la recta numérica) mientras que el segundo está a $\frac{1}{6}$ de 1, y sé que $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$.

7. **Una comprensión superficial de la equivalencia entre dos fracciones**. Se introduce el algoritmo de equivalencia demasiado pronto y se simboliza con dos flechas entre las fracciones (ver figura). Los estudiantes no aprecian que multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número equivale a multiplicarla por 1, y multiplicar un número por 1 no cambia su valor.

8. **Una falta de comprensión de los algoritmos de cálculo**. Esto se debe en parte al enfoque procedimental de la enseñanza de las fracciones. El conocimiento procedimental es importante, ciertamente, pero cuando no se acompaña de un conocimiento conceptual, no incita a los estudiantes ni a comprender ni a apreciar las matemáticas. Ejemplo: los estudiantes no comprenden

[1] De 6 a 8 años en Francia

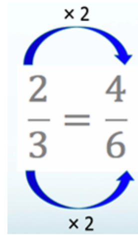


Figura 1: Equivalencia de las fracciones

por qué, cuando se multiplican dos fracciones, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, mientras que, para la división de dos fracciones, se invierte la segunda y luego se multiplican.

¿QUÉ PISTAS PARA REMEDIARLO?

El objetivo final de la enseñanza de las fracciones es ayudar a los estudiantes a comprender las fracciones como números por derecho propio y como objetos que pueden ser manipulados por la aritmética. Pero alcanzar este objetivo no es tarea fácil. Es importante destacar que la noción de «fracción como número» se construye progresivamente, a lo largo del tiempo. Los dos años adicionales en el ciclo 2 permitirán a los maestros tomarse el tiempo para cultivar la comprensión conceptual de las fracciones. Aquí hay algunos consejos pedagógicos:

1. **Explorar los sentidos y representaciones múltiples de una fracción**. Las fracciones tienen muchos rostros (llamados «subconstructos» por Thomas Kieren), pero los estudiantes a menudo solo tienen una idea limitada de su sentido. Esto es el resultado directo de las experiencias limitadas que tienen en primaria. Antes del colegio, los estudiantes deberían experimentar una fracción como parte-todo, medida, división/cociente, e incluso ejemplos simples de relación/tasa. Ya hacen la experiencia de una fracción como operador en situaciones de resolución de problemas, tales como: «Idris tiene globos. $\frac{1}{3}$ de los globos es azul, $\frac{1}{2}$ es rojo y el resto es amarillo. Tiene 7 globos amarillos. ¿Cuántos globos tiene Idris en total?»
   Cada una de estas nociones de fracción debe ser explorada en una amplia gama de representaciones.

   Tomemos la noción más concreta que proviene de la vida cotidiana del niño, la de **parte-todo**. Al principio, los estudiantes comparten 1, 3 o 5 galletas entre dos personas y pasan progresivamente a situaciones más complejas. Consideren cantidades continuas al principio, luego cantidades discretas después: es más difícil para un niño encontrar $\frac{1}{4}$ de 20 estudiantes que $\frac{1}{4}$ de una tarta. Sean atentos a las preguntas que hacen. Supongamos que 2 huevos de una caja de 6 están rotos. Concentrarse en el número de huevos que no están rotos es un razonamiento aditivo: $\frac{2}{6}$ (huevos rotos) $+\frac{4}{6}$ (huevos enteros) componen

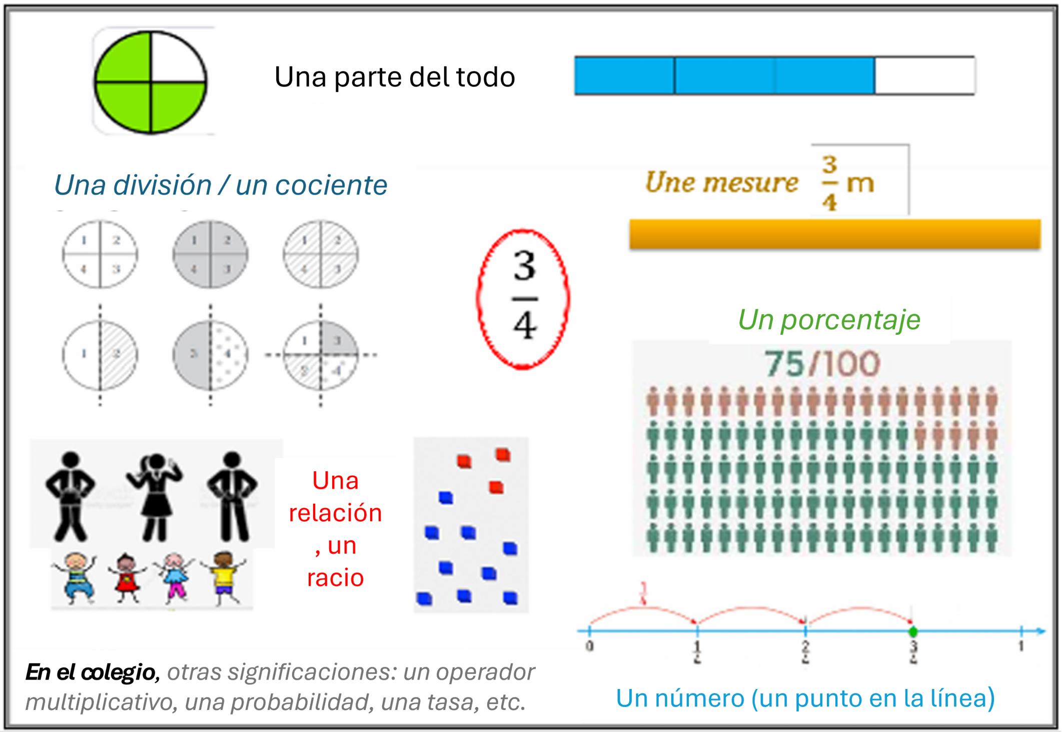


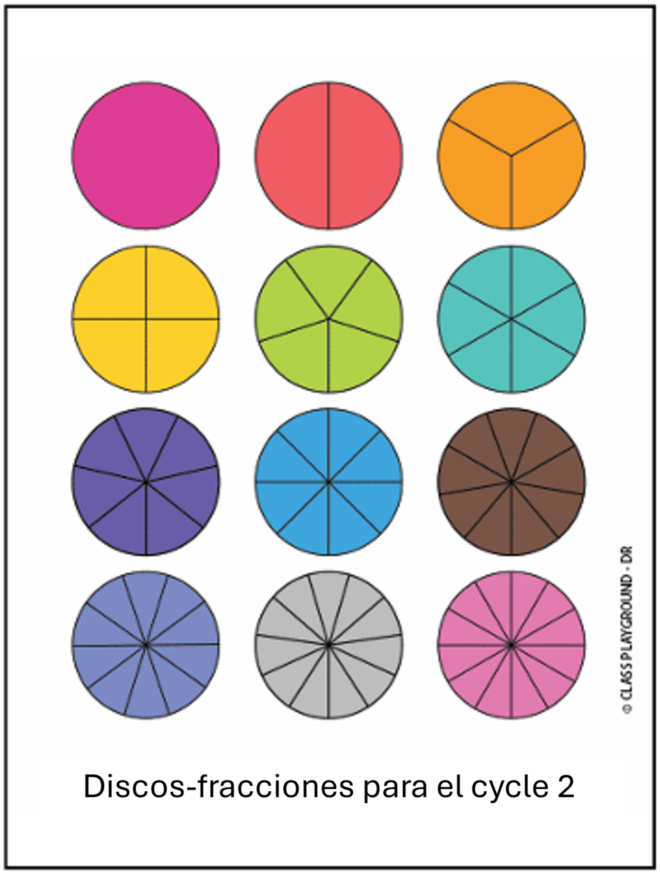
Figura 2: Equivalencia de las fracciones

la caja entera de 6 huevos, o el todo ($\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$). En cambio, concentrarse en la parte de la caja que está rota en relación con el todo es un pensamiento multiplicativo: 2 (huevos rotos) representa $\frac{1}{3}$ de la caja de 6 huevos ($2 = \frac{1}{3} \times 6$).

Nota:
Investigadores, como Confrey, han mapeado siete dominios de conceptos relacionados con los números racionales en sus trayectorias de aprendizaje que se desarrollan desde preescolar hasta CM2. Han subrayado la importancia de la equipartición como punto de partida, construcción anclada en la generación de partes iguales (por ejemplo: partición de una tarta) o de grupos iguales (por ejemplo: partición de una clase de estudiantes). Las estrategias de particionamiento adquiridas permitirán a los estudiantes particionar los segmentos unitarios en la recta numérica (en CE2 y más allá) y ubicar las fracciones (y más tarde los números decimales) en la recta numérica, proporcionando así una base sólida para trabajar la magnitud relativa de diferentes números, un antídoto eficaz contra muchas ideas falsas que afectan la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y los decimales.

2. **Insistir en la importancia de la unidad**. Comprender que la magnitud de un número en escritura fraccionaria es relativa al tamaño de la unidad es una clave para comprender los números racionales, según Barnett-Clarke y otros.

¿Qué hacer en el ciclo 2 para remediarlo? Aquí hay un tipo de ejercicio de sensibilización que puede proponerse regularmente: Muestre una pieza en forma de medio disco (una de las piezas rojas en la figura de los discos-fracciones) y haga la pregunta: «¿Qué fracción representa esto?».



Discos-fracciones para el cycle 2

Figura 3: Disco fracción.

La mayoría de los niños (¡y de los adultos!) responderán al unísono: «una mitad». Sin embargo, en su pregunta, usted no ha identificado el todo o la unidad. En lugar de responder «eso es falso», haga otra pregunta: «¿Les he precisado cuál es el todo?»
Continúe con:

- si la unidad es 1 disco entero, efectivamente la respuesta es $\frac{1}{2}$;
- pero si la unidad es 3 discos (3 discos fucsia aquí, representando por ejemplo un paquete de 3 galletas), la respuesta es entonces $\frac{1}{6}$;
- y si la unidad es un cuarto de disco (una de las piezas amarillas en la figura), entonces la respuesta es 2. Etc.

Este tipo de ejercicio, en múltiples formas y contextos, debe explorarse en el ciclo 2. Sensibilizar a los niños sobre el hecho de que una fracción es una relación entre una parte y un todo es esencial. El siguiente ejercicio muestra que una pieza de mosaico del mismo tamaño puede representar todo tipo de fracciones, dependiendo de la elección de la unidad.

3. **Trabajar la noción de equivalencia con la ayuda de representaciones concretas**. ¿Qué trabajo proponer para que los estudiantes desarrollen imágenes mentales de la equivalencia entre 2 fracciones?
   Con ejemplos concretos de la vida cotidiana de la clase o con la ayuda de material pedagógico, es importante hacerles comprender que, por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es

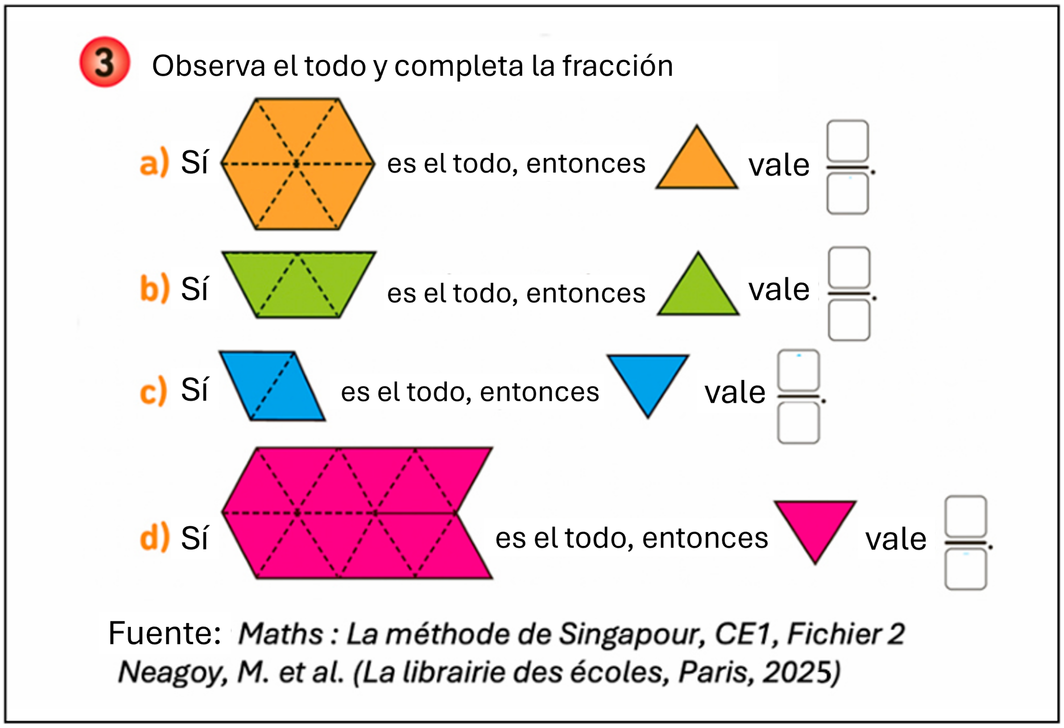


Figura 4: Método de singapur.

equivalente a $\frac{4}{6}$ porque el número de partes se ha duplicado y, por lo tanto, el tamaño de las partes se ha dividido entre dos para preservar la misma cantidad. La expresión «fracción equivalente» no tiene mucho sentido para un niño pequeño. Diga más bien «$\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son dos nombres diferentes para la misma fracción».

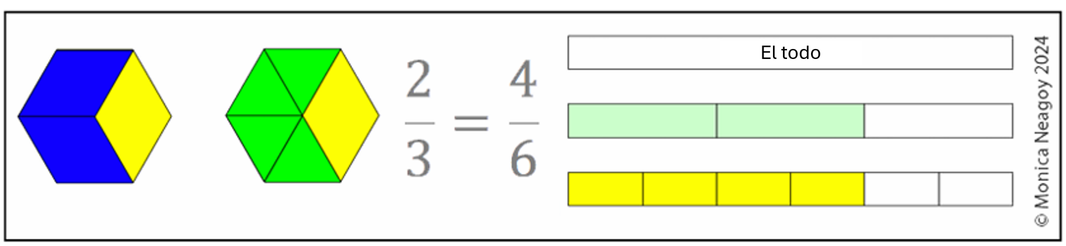


Figura 5: Equivalencia y fracción

De la misma manera, con contextos y material variado, haga descubrir a los estudiantes los diferentes nombres del todo, de la unidad: 2 medios hacen 1 todo; 3 tercios hacen 1 todo; 4 cuartos hacen 1 todo, etc. Más tarde, la escritura simbólica para las fracciones equivalentes a 1 será: $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1$.

4. **Anclar las fracciones en su historia**. Finalmente, como con cualquier tema matemático, la introducción de las fracciones se refuerza compartiendo un poco de historia. Por un lado, esto le da a las matemáticas un rostro humano al disipar la hipótesis de que las matemáticas fueron transmitidas a la humanidad, tal cual. Explique cómo y por qué surgieron y describa las contribuciones de diferentes países que contribuyeron a su largo desarrollo. Así, los egipcios ya utilizaban fracciones unitarias, es decir, fracciones de la forma $\frac{1}{n}$, ¡pero con

una notación diferente! En cambio, el hecho de que los matemáticos y matemáticas hayan tardado más de cuatro milenios en concebir la notación decimal con coma nos recuerda que la transición de las fracciones a la notación decimal con coma es muy compleja. ¡Seamos más empáticos con los estudiantes que encuentran dificultades con estas escrituras simbólicas!

Para ir mas lejos (en inglés):

- Neagoy, M. (2017). Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding. (Arlington, VA: Association for Supervision & Curriculum Development).

- Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of The International Group For The Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 345–352). Thessaloniki, Greece: International Group For The Psychology Of Mathematics Education.

- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.). Number concepts and operations in the middle grades, (141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Artículo original disponible aquí
Traducción de michael.canu@univ-perp.fr para la Red NeuroEducación (red-neuroeducacion.org).